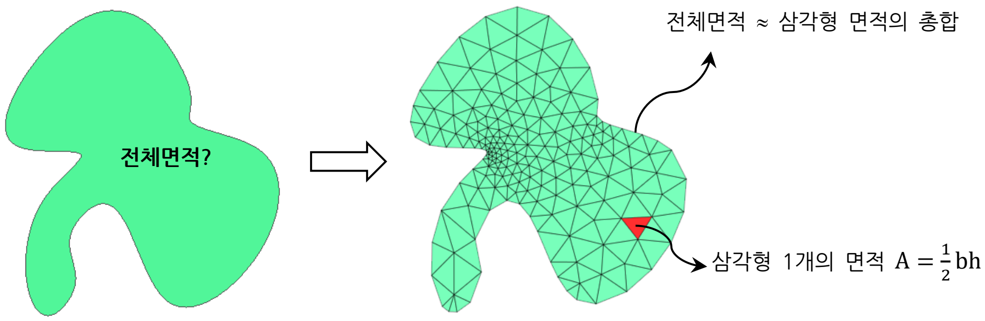
실무 유한요소 해석의 이해와 활용

유한요소법의 기본개념

MIDAS | 반·디·통

1. 유한요소법 (Finite Element Method, FEM)

<그림 1>의 왼쪽과 같은 임의 모양의 영역의 면적을 구하는 문제에는 이론해가 존재하지 않습니다. 하지만, 만약 이 영역을 오른쪽과 같이 여러 개의 삼각형으로 분할하면 삼각형 하나의 면적은 간단하게 계산할 수 있고, 영역의 전체면적은 삼각형 면적의 총합으로 근사적으로 구할 수 있습니다.



<그림 1> 이론해가 없는 문제에 대한 근사해법 방식의 풀이

유한요소법은 이처럼 정확한 이론해를 구하기 어려운 문제에 대한 수치적인 근사해법(approximation method)입니다. 즉, 이론해를 직접 구하기 어려운 복잡한 모델을 우리가 조작할 수 있는 유한개의 요소(element)로 분할하고, 개별 요소의 특성을 계산한 다음, 전체 요소의 특성을 모두 조합하여 전체 모델의 특성을 근사적으로 계산하는 방법으로 이해할 수 있습니다.

유한요소법의 보다 정확한 수학적/공학적 정의와 관련 개념들은 다음과 같습니다.

1.1 장(場)문제 (field problem)

장문제는 구하고자 하는 미지수가 f(x,y,z)처럼 위치(좌표)의 함수로 정의되는 문제입니다.

예로, 온도해석에서는 각 위치에서의 온도분포(T(x,y,z))를 계산하고, 응력해석에서는 각 위치에서의 변위(u(x,y,z)), 응력((x,y,z)) 등을 계산하게 됩니다.

이러한 장문제는 일반적으로 미분방정식(differential equation)으로 표현되며, 간단한 모델과 경계조건에 대해서는 이론해를 구할 수 있지만, 복잡한 모델, 조건에 대해서는 이론해를 구하기가 어렵습니다.

1.2 유한요소법 (finite element method)

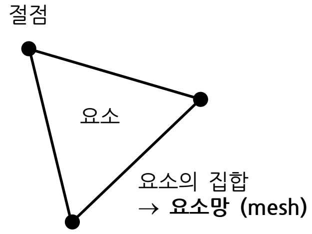
유한요소법은 장문제(미분방정식)의 해를 계산하는 수치적인 근사해법으로, 미분방정식을 연립대수방정식(Ku=f)으로 변환하여 해석합니다.

이론해법(analytical method)은 모든 위치(무한개)에서 해를 계산할 수 있지만, 유한요소법에서는 특정 관심위치(유한개)에서 해를 근사적으로 계산합니다.

1.3 요소, 절점, 자유도

유한요소법에서 결과(미지수)가 계산되는 위치를 절점(node)이라 하고, 일반적으로 요소의 꼭지점입니다. 절점은 요소의 모양과 위치를 정의하고, 또 결과가 계산되는 위치입니다.

그리고, 절점의 미지수를 자유도(degree of freedom, DOF)라고 합니다. 즉, 자유도는 장(field)의 공간분포를 정의하는 변수가 됩니다. (자유도의 예: 온도해석의 온도, 응력해석의 변위 등)



<그림 2> 절점과 요소

유한요소법 이외에도 여러가지 수치적인 근사해법이 있지만, 다음과 같은 장점 때문에 실무해석에서는 유한요소법이 가장 많이 활용되고 있습니다.

- ✓ 모든 장문제에 적용이 가능합니다. (응력해석, 온도해석, 유동해석, 전자기장해석 등)
- ✓ 유한요소법은 다양한 모양의 요소를 제공하기 때문에 해석 대상의 기하학적인 모양에 제약이 없으며, 특히 자동요소망생성(auto mesh generation) 기능을 이용하여 간편하게 해석을 위한 요소망을 작성할 수 있습니다.
- ✓ 하중, 경계조건의 사용에 제약이 없습니다. 유한요소법은 하중, 경계조건을 절점 기준으로 처리하므로 원하는 하중, 경계조건의 부여 위치에 절점만 존재하면 됩니다.
- ✓ 다양한 재료를 사용할 수 있으며, 상대적으로 해석에서 요구되는 재료의 물성치를 구하는 것이 용이합니다.
- ✓ 유한요소법은 다양한 거동/특성을 표현하는 요소를 제공하고 이들의 혼용이 가능하기 때문에 해석모델의 각 부분마다 다른 거동과 재료를 정의하는 것이 가능합니다.
- ✓ 해석결과의 정확도를 향상시키는 방법이 직관적입니다.
- ✓ 수치적인 근사해법에는 계산오차가 존재합니다. 예로 <그림 1>의 오른쪽에서 각 변이 직선인 삼각형으로는 곡선인 경계를 정확하게 묘사하는 것이 어렵고 이에 따라 계산오차가 존재합니다. 하지만, 요소의 크기를 보다 작게 하고, 요소의 개수를 늘리면 결과의 정확도를 향상시킬 수 있습니다. 즉, 요소망을 보다 조밀하게 구성함에 따라 해의 정확도가 향상되기 때문에 상대적으로 쉽고 직관적으로 결과의 정확도를 향상시킬 수 있습니다.
- ✓ 유한요소법은 단위요소의 특성을 계산한 다음, 전체요소의 특성을 조합하는 방법으로 근사해를 구하기 때문에 유사한 과정의 반복연산이 많고, 이에 따라 컴퓨터에 의한 자동화가 용이합니다.

2. 유한요소법의 행렬방정식

유한요소법은 장문제를 정의하는 미분방정식을 대수방정식으로 변환하여 해석하며, 최종적으로 다음과 같은 행렬방정식을 구성하여 해를 계산합니다.

$$[\mathbf{K}]\{\Delta\} = \{\mathbf{f}\}$$

행렬방정식	$[\mathbf{K}]$	$\{\Delta\}$	$\{\mathbf{f}\}$
	행렬 (N×N)	벡터 (N×1)	벡터 (N×1)
	특성 (characteristic)	**거동 (behavior)**	**작용 (action)**
응력해석	강성 (stiffness)	변위 (displacement)	힘 (force)
온도해석	열전도 (conduction)	온도 (temperature)	열속 (heat flux)

<표 1> 유한요소해석에서 행렬방정식의 구성

이 유한요소해석의 행렬방정식에서 **특성**은 해석종류에 따라 요구되는 **대상 구조물의 특성**을 정의하고, **거동**은 구하고자 하는 계산대상인 미지수, 즉 **자유도**입니다.

2.1 강성 (stiffness)

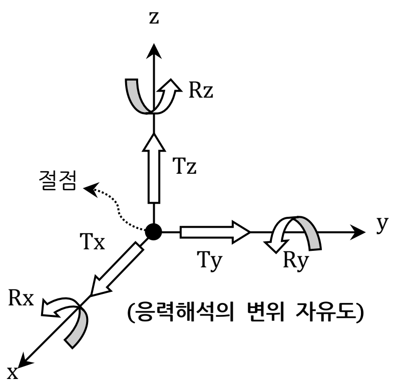
유한요소법을 이용한 응력해석에서 특성은 구조물의 강성입니다.
$K \cdot \Delta = f$의 식에서 변위 Δ를 1로 놓으면 $K \cdot 1 = f$가 되고, **강성**의 의미는 **단위변형(Δ=1)을 발생시키는데 필요한 힘의 크기**임을 알 수 있습니다. 즉, 강성이 크다는 것은 단위변형을 발생시키는데 더 큰 힘이 필요하다는 것으로, 이것은 구조물이 그만큼 강하다(stiff) 또는 뻣뻣하다는 의미가 됩니다. 반대로 강성이 작다는 것은 작은 힘으로도 쉽게 단위변형을 발생시킬 수 있으므로 구조물의 그만큼 약하다 또는 유연하다(flexible)는 의미가 됩니다.[1]

[1] 참고로, 강성의 역수(역행렬)은 **컴플라이언스(compliance)**, $C = \frac{1}{K}$ ($\Delta = C \cdot f$)이고, 그 의미는 단위하중에 의해 발생하는 변형량(Δ=

<고체역학의 기본개념> 장에서 정리한 고체역학적 관점에서 보면, 특성, 거동, 작용은 각각 변형에 대한 고체의 저항능력, 고체의 변형, 그리고 고체에 변형을 유발하는 작용으로 생각할 수 있습니다.

2.2 자유도

유한요소해석의 행렬방정식에서 구하고자 하는 미지수는 자유도이고, 해석종류와 요소종류에 따라 자유도의 물리적 의미와 절점이 갖는 자유도의 종류와 개수가 달라집니다.



해석종류	응력해석	온도해석
자유도	변위 (벡터)	온도 (스칼라)
자유도 개수/성분	절점당 6개	절점당 1개
	3개의 병진자유도 (Tx, Ty, Tz) 3개의 회전자유도 (Rx, Ry, Rz)	

<그림 3> 해석종류별 자유도 구성 (개수와 성분)

<그림 3>에 정리된 응력해석의 6개의 변위 자유도 {Tx, Ty, Tz, Rx, Ry, Rz}T 는 가장 일반적인 경우를 정리한 것이고, 실제 자유도 개수와 성분은 모델종류와 요소종류에 따라 달라집니다. 예로, 솔리드요소는 3개의 병진자유도(translation)만 가지고, 회전자유도(rotation)는 갖지 않습니다. 즉, 솔리드요소는 각 절점당 총 3개의 자유도를 갖습니다.

[K]{Δ}={f}의 행렬식에서 [K]의 크기는 미지수, 즉 자유도의 개수(N)에 비례하고(N N), 이에 따라 해석에 요구되는 메모리량과 해석시간에 가장 큰 영향을 미치는 인자도 모델의 전체 자유도 개수입니다. 모델의 전체 자유도 개수는 개략적으로 총 절점의 개수 절점당 자유도 개수로 계산할 수 있습니다.

일반적인 3차원 문제에서 메모리 사용량과 해석시간은 전체 자유도 개수의 세제곱(N3)에 비례합니다. 응력해석과 온도해석을 비교하면 온도해석의 자유도 개수가 작기 때문에 보다 큰 규모의 모델에 대한 해석이 가능합니다. 또한, 동일한 모델을 이용하여 응력, 온도해석을 수행할 경우에도 온도해석의 자유도가 작기 때문에 적은 메모리량을 사용하면서 훨씬 빨리 계산이 완료됩니다.

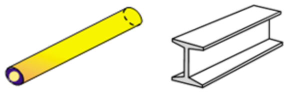
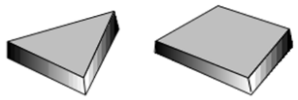
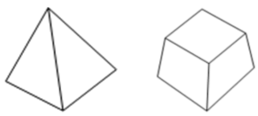
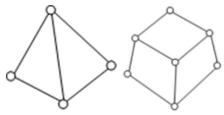
3. 요소

유한요소법을 올바르게 활용하기 위한 가장 중요한 핵심사항은 올바른 요소의 선택과 사용이며, 이를 위해서는 각 요소의 거동특성(활용, 제약사항)과 하위절점의 자유도(종류)를 이해하여야 합니다.

3.1 기하학적 차원에 의한 요소 분류

요소는 하위절점(좌표 정보)이 정의하는 기하학적 차원(특성)에 따라 다음처럼 분류할 수 있습니다.

1 · f)입니다. **유한요소법**은 **강성법(stiffness method)**이고, **실험**은 **컴플라이언스법(compliance method)**입니다. 유한요소법에서는 구조물의 특성을 강성(단위변형을 발생시키는데 필요한 힘)으로 표현하고, 실험에서는 컴플라이언스(단위하중에 의해 발생하는 변형량)로 구조물의 특성을 표현합니다. (예: 용수철 1kgf의 힘으로 잡아당겼을 때 얼마만큼의 변위가 발생하는가의 측정실험 → 단위하중에 대한 변형량 측정)

분류	실제 모델	유한요소 표현 (절점으로 정의되는 기하특성)	추가 요구사항 (실제부피 계산)
1D	 봉(트러스) 보	 **길이 (L)**	**면적 (A, 단면형상)** $\rightarrow V = L \times A$
2D	 쉘, 평면응력, 평면변형률, 축대칭 등	 **면적 (A)**	**두께 (t)** $\rightarrow V = A \times t$
3D	 솔리드	 **부피 (V)**	**없음** (부피계산 가능)
기타	스프링, 질량, 강체연결 등	-	

<표 2> 절점이 정의하는 기하학적 차원(특성) 기준의 요소 분류

<표 2>의 추가 요구사항은 요소의 역학적 거동은 고려하지 않고 순수하게 기하학적 측면에서 요구되는 추가적인 입력사항입니다. 실제 모델은 모두 3차원이며 부피를 갖습니다. 모델의 부피를 계산하기 위하여 절점이 정의하는 기하특성(길이, 면적, 부피)에 추가적으로 요구되는 항목이 있습니다. 예로, 1D 요소에서는 두 개의 양끝 절점이 길이만 정의할 수 있으므로, 실제 3차원 모델의 부피를 계산하기 위해서는 추가적으로 단면적(단면형상) 정보가 필요합니다.

이렇게 추가적으로 요구되는 입력사항들을 보통 프로퍼티(property)라고 부르기도 하며, 일반적으로 기하학적인 추가정보 이외에 요소의 역학적 거동을 정의하는 항목들도 함께 입력받습니다.

일반적으로 요소를 정의할 때에는 기본적인 요소종류의 선택 이외에 하위절점(위치), 프로퍼티, 그리고 재료 정보 등이 필요합니다.

3.2 요소의 종류

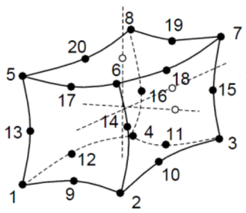
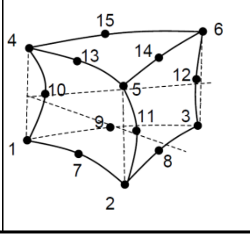
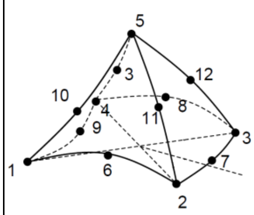
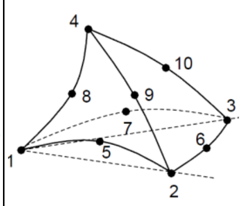
모델의 차원과 요구되는 역학적 거동에 따라 다양한 요소 종류가 존재하며, 해석 대상 구조물의 특징과 해석의 목적, 원하는 결과의 종류에 따라 적절한 요소를 선택해서 사용할 수 있습니다.

실무해석에서 많이 사용되는 대표적인 요소들은 다음과 같습니다.

- ✓ **솔리드요소 (solid element)**

  솔리드요소는 부피가 있는 구조물의 모델링에 주로 이용되며, 특히 CAD 모델과 자동요소망생성 기능을 이용하면 간편하게 해석을 위한 모델을 작성할 수 있으므로 실무 설계해석에서 가장 많이 사용되는 요소입니다.

  midas NFX는 **육면체(hexahedron)**, **쐐기(wedge)**, **피라미드(pyramid)**, **사면체(tetrahedron)**, 총 4개의 형상을 갖는 저차(1차, linear)와 고차(2차, quadratic)의 솔리드요소를 제공합니다.

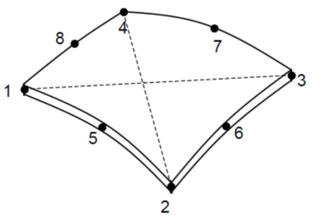
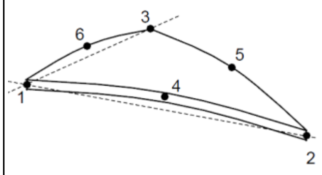
육면체	쐐기	피라미드	사면체
			

  솔리드요소는 절점당 3개의 **병진자유도 $\{Tx, Ty, Tz\}^T$** 만 갖고, 회전자유도는 없습니다.

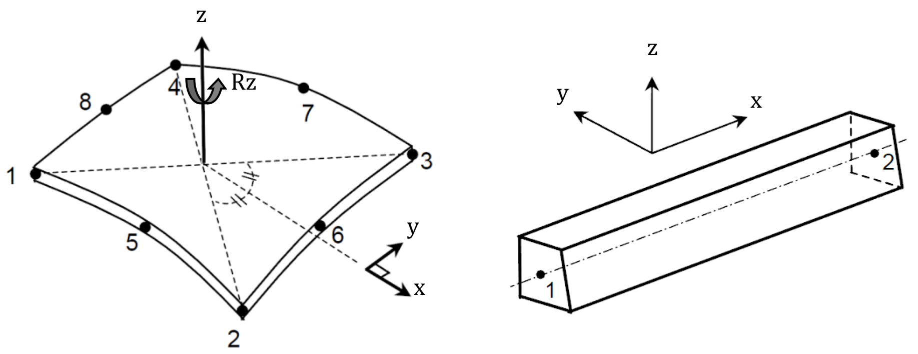
✓ **쉘요소 (shell element)**

쉘요소는 두께가 얇은 박판 구조물(두께가 길이의 $\frac{1}{10}$보다 작은 구조물)이 굽힘변형(bending)을 받을 때 주로 이용되며, 2차원 응력상태, 굽힘 및 전단변형 등을 고려할 수 있습니다.

midas NFX는 **사각형(quadrilateral)**, **삼각형(triangle)** 형상을 갖는 저차와 고차의 쉘요소를 제공합니다.

사각형	삼각형
	

쉘요소는 절점당 기본적으로 3개의 **병진자유도** $\{Tx, Ty, Tz\}^T$와 2개의 **회전자유도** $\{Rx, Ry\}^T$를 갖습니다. 면내 회전자유도(drilling DOF, Rz) 옵션을 선택하면, 모든 방향에 대한 회전자유도를 가질 수도 있습니다. 쉘요소의 자유도는 요소별로 정의되는 **요소좌표계(element coordinate system)**를 따릅니다. (**<그림 4>**의 왼쪽 참고)



<그림 4> 쉘요소와 보요소의 요소좌표계

✓ **보요소 (bar/beam element)**

2개의 양 끝 절점으로 정의되는 1차원 선요소이며, 단면의 치수에 비하여 길이가 긴 부재가 굽힘변형을 받을 때 주로 사용합니다. 길이에 대한 단면의 폭 또는 높이비가 대략 $\frac{1}{5}$ 보다 커지면 전단변형(shear)에 의한 영향이 매우 커지게 되므로, 보요소 대신 쉘요소나 솔리드요소를 사용하는 것이 바람직합니다.

보요소는 절점당 3개의 **병진자유도** $\{Tx, Ty, Tz\}^T$와 3개의 **회전자유도** $\{Rx, Ry, Rz\}^T$, 총 6개의 자유도를 모두 가지며, 보요소의 자유도는 **<그림 4>**의 오른쪽과 같은 요소좌표계를 따릅니다.

3.3 요소망 작성시 참고사항

✓ **솔리드요소는 저차 육면체요소 또는 고차 사면체요소를 사용하고, 쉘요소는 저차 사각형요소를 사용하는 것이 좋습니다.**

저차 사면체/삼각형요소는 상대적으로 강하여(stiff) 변위/응력이 작게 계산되므로 가급적 사용하지 않는 것이 좋습니다. 하지만, 모양이 나쁜 육면체/사각형요소 보다는 모양이 좋은 사면체/삼각형요소를 사용하는 것이 더 좋습니다.

✓ **요소는 크기가 작고, 모양이 정다면체/정다각형에 가까운 형상일수록 해석결과가 좋습니다.**

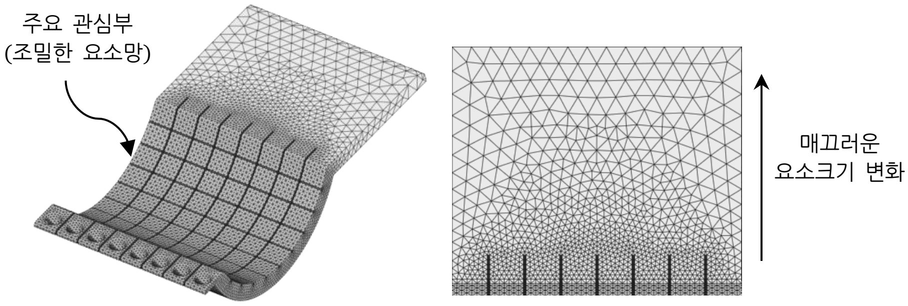
(→ compact & regular)

특히, 모달/좌굴/비선형해석에서는 해석결과가 요소의 모양에 보다 민감하게 반응하므로 좋은 모양의 요소를 작성하도록 주의할 필요가 있습니다.

✓ **해석결과의 정확도와 해석의 경제성을 모두 고려하여 요소망의 조밀도를 선택합니다.**

요소망이 조밀도해 질수록 해석결과의 정확도는 향상되지만, (절점/요소의 증가로 인해) 해석시간과 메모리 사용량은 증가하므로 적절한 조밀도를 갖는 요소망을 작성하는 것이 중요합니다.

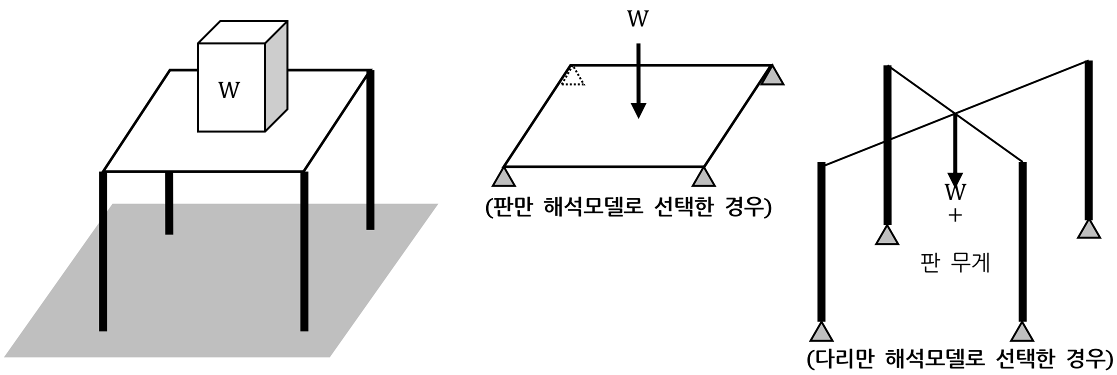
기하형상의 변화가 심한 부분, 응력집중이 예상되는 부분과 재질 및 하중이 변하는 부분에는 보다 조밀한 요소망을 작성하는 것이 좋고, 결과가 중요하지 않은 부분, 기하형상의 변화가 거의 없는 부분에는 상대적으로 큰 요소를 사용하는 것이 가능합니다. 이때, 인접한 요소간의 크기 차이가 지나치게 크지 않도록 하고, 가급적 요소 크기가 선형으로 매끄럽게 변할 수 있도록 요소망을 작성합니다.



<그림 5> 요소망 조밀도의 조절 예

4. 해석모델과 하중, 경계조건

해석모델은 우리가 관심을 갖는 대상영역입니다. 해석모델은 해석자가 판단하여 선택하고, 해석모델을 제외한 나머지 생략부분은 해석모델에 미치는 영향에 따라 하중 또는 경계조건으로 표현됩니다. 즉, 생략된 부분이 해석모델의 움직임, 변형을 유발하면 하중으로 표현하고, 해석모델의 움직임/변형을 제한(억제)하면 경계조건으로 표현합니다.



<그림 6> 해석모델과 하중/경계조건의 선택

<그림 6>의 왼쪽처럼 무게가 W인 어떤 물체가 놓이는 테이블을 해석하는 경우를 가정해 보겠습니다.
전체 시스템을 구성하는 요소로는 테이블과 테이블 위에 놓인 물체, 그리고 테이블이 놓이게 되는 지면이 있습니다. 하지만, 우리가 테이블의 해석을 위해서 테이블 뿐만 아니라 물체의 정확한 형상과 크기가 무한대인 전체 지면(지구)을 모델링할 수는 없습니다.

이러한 경우에 다음과 같은 세 가지 해석모델을 생각할 수 있습니다.

- ✓ **테이블 전체를 해석모델로 선택하는 경우**
  가장 일반적인 선택이고, 전체 요소 중 생략된 것은 위에 놓은 물체와 테이블을 받쳐주는 지면입니다. 여기에서 물체는 테이블의 변형(처짐)을 유발하므로 무게와 동일한 크기의 하중으로 처리하고, 지면은 테이블의 움직임을 제한하므로 구속 경계조건으로 표현합니다.

- ✓ **테이블 상부 판만 해석모델로 선택하는 경우 (<그림 6>의 가운데)**
  이 경우에 전체 요소 중 생략된 것은 위에 놓인 물체와 테이블 다리, 지면입니다. 위의 경우와 마찬가지로 물체는 판의 변형(처짐)을 유발하므로 하중으로 처리하고, 다리는 판의 움직임/변형을 제한하므로 구속 경계조건으로 표현합니다. 지면은 이미 다리가 판의 움직임/변형을 제한하고 있으므로 추가적인 표현이 필요하지 않습니다.

✓ **테이블 다리만 해석모델로 선택하는 경우 (<그림 6>의 오른쪽)**
이 경우에 전체 요소 중 생략된 것은 상부 판 위에 놓인 물체, 상부 판, 그리고 지면입니다. 물체와 상부 판은 다리의 변형을 유발하므로 물체의 무게와 판의 무게를 더한 크기만큼의 하중으로 처리하고, 지면은 다리의 움직임/변형을 제한하므로 구속 경계조건으로 표현할 수 있습니다.

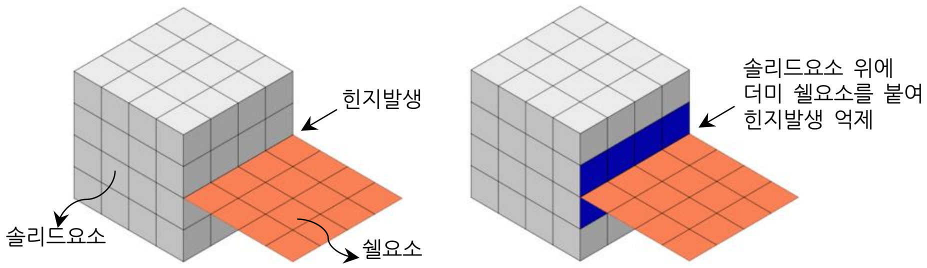
이 예와 같이 해석자는 해석목적과 효율성 등을 기준으로 자유롭게 해석모델을 선택할 수 있으며, 어떤 영역을 해석모델로 선택하느냐에 따라 하중과 경계조건이 달라질 수 있습니다. 그러므로, 해석을 수행할 때에는 먼저 적절한 해석모델, 즉 해석영역을 선정하고, 나머지 생략된 부분은 이 해석모델에 미치는 영향(변형의 유발 또는 제한)에 따라 적절하게 하중 또는 경계조건으로 표현하면 됩니다.
참고로, 단일 물체의 경우도 반드시 전체를 모델링하여 해석에 포함시켜야 하는 것은 아니고, 관심부위만 잘라내서 해석모델로 사용할 수 있습니다. 이 경우에도 역시 포함되지 않은 물체의 나머지 부분은 그 역할에 따라 하중 또는 경계조건으로 표현해 주면 됩니다.

그리고, 요소종류별로 하위절점이 갖는 자유도의 종류/개수가 다르기 때문에 하중, 경계조건을 지정할 때 이를 고려할 필요가 있습니다.

4.1 요소종류별 자유도 차이에 따른 모델링 및 하중/경계조건 처리의 주의사항

✓ **요소가 갖는 자유도에 따라 적절한 구속조건을 지정하여야 합니다.**
예로 솔리드요소는 병진자유도만 가지므로 구속조건을 지정할 때 회전자유도를 무시하여도 되지만, 쉘요소와 보요소는 병진/회전자유도를 모두 가지므로 완전 구속조건을 지정할 때에는 반드시 6개 자유도 전체를 구속하여야 합니다.

✓ **여러 종류의 요소를 혼용하여 모델을 작성할 때, 다른 종류의 요소가 만나는 절점에서 자유도 단절이 발생하지 않도록 주의하여야 합니다.**
예로 솔리드요소와 쉘요소를 연결하면, 연결절점에서 솔리드요소는 회전자유도가 없기 때문에 쉘요소의 회전자유도가 풀리게 되고, 힌지(hinge) 연결처럼 쉘요소가 자유롭게 회전하게 됩니다. 이러한 경우에는 연결절점에서 회전자유도를 적절하게 구속하거나 더미 쉘요소 등을 추가하여 힌지의 발생을 억제시켜야 합니다.



<그림 7> 솔리드요소와 쉘요소의 연결 예

✓ **자유도에 따라 적절한 하중을 사용하여야 합니다.**
하중과 하중이 부여되는 절점의 자유도는 서로 대응(corresponding) 되어야 합니다. (예: 집중하중-병진자유도, 모멘트하중-회전자유도)
예로 솔리드요소의 절점은 회전자유도를 갖지 않기 때문에 회전거동을 지정하는 모멘트 하중에 대해 반응하지 않습니다.[2] 만약, 솔리드모델에 모멘트 하중을 부여하고자 할 때에는 리모트하중(remote load)을 이용하거나, 솔리드모델 해당

[2] 참고로, 하중과 자유도의 대응관계는 두 개의 곱이 일(work)이 되는지 체크하여 확인할 수도 있습니다. 예로 집중하중([N])과 병진자유도([m])의 곱, 그리고 모멘트 하중([N·m])과 회전자유도([rad])의 곱은 일(work, ([N·m])이 되지만, 모멘트 하중([N·m])과 병진자유도([m])은 일(work)이 아닙니다.

면의 절점들을 강체연결(rigid link)로 묶고, 강체연결의 주절점(master node)에 모멘트하중을 부여합니다.

최소의 해석자원을 투입하여 원하는 결과를 얻는 효율적인 해석을 위해서는 적절한 해석모델과 하중/경계조건의 선정이 대단히 중요합니다.
midas NFX가 제공하는 하중, 경계조건의 종류와 활용은 **<선형정적해석>** 장에 정리되어 있습니다.

5. 유한요소해석의 종류

유한요소법으로 해석할 수 있는 해석의 종류는 다양합니다.

설계단계에서의 강도검토를 위한 선형정적해석부터 복잡한 실제거동의 정확한 분석을 위한 비선형해석까지 해석의 목적에 따라 적합한 해석종류를 선택하여 효율적인 해석을 수행하여야 합니다.

5.1 선형정적해석 (linear static analysis)

정적은 작용하중이 시간에 따라 변하지 않는 것이며, 만약을 작용하중이 시간에 따라 변하면 **동해석(dynamic analysis)**을 수행하여야 합니다.

선형해석(linear analysis)은 다음과 같은 세가지 조건을 만족해야 합니다.

- ✓ **재료가 탄성영역 내에서 후크의 법칙을 따라 거동합니다. 즉, 하중과 변위, 응력과 변형률은 선형의 관계를 가져야 합니다.**
  만약 그렇지 않다면, 즉 재료의 소성영역까지 고려할 필요가 있거나, 응력-변형률이 관계가 미소변형률 영역에서도 선형이 아니면(예: 고무재료) **재료비선형(material nonlinear)**을 고려한 해석을 수행하여야 합니다.

- ✓ **발생변형에 의한 구조물의 강성변화를 무시할 수 있을 만큼 변형이 작아야 합니다.**
  만약 구조물의 대변형(대변위, 대회전)을 고려하여야 한다면 **기하비선형(geometry nonlinear)**을 고려하여야 합니다.

- ✓ **하중이 작용하고, 이로 인한 구조물의 변형이 발생하는 동안 경계조건이 변하지 않아야 합니다.**
  만약 하중이 작용하는 동안 경계조건이 변한다면 **경계비선형(boundary nonlinear)**을 고려하여야 하며, 대표적인 경계비선형해석은 **접촉해석(contact analysis)**입니다.

선형정적해석은 이와 같은 선형의 조건을 만족하는 모델에 시간에 대해 불변인 하중을 재하하여 수행하는 해석을 의미하며,
선형의 특징에 따라 결과의 중첩(superposition)이 가능합니다.
일반적으로 선형정적해석에서는 (최대)변위와 (최대)응력, 그리고 안전율 등의 결과를 검토합니다.

5.2 모달해석 (modal analysis)

구조물 고유의 동적특성을 분석하는데 사용되며, 외력과 감쇠(damping)가 없는 조건에서 구조물의 고유진동수와 고유 진동수별 변형형상(모드형상)를 계산합니다.

구조물의 기본적인 동적특성을 파악하는 것 이외에 진동이 발생하는 구조물에 장착되는 부품에 대해 이 부품이 공진을 피하도록 설계하거나, 시스템의 운영 진동수에서의 원하는 변형형상을 파악/유도하는 용도로 활용할 수도 있습니다.

5.3 좌굴해석 (buckling analysis)

재료의 파괴메커니즘에 따라 요구되는 선형해석의 종류가 달라질 수 있습니다.

일반적으로 인장하중을 받는 구조물은 항복에 의해 파괴가 발생하지만, 압축하중을 받는 구조물은 좌굴에 의해 파괴가 발생할 수 있습니다. 즉, 인장하중에 의한 항복파괴를 검토할 때에는 선형정적해석을 수행하지만, 압축하중에 의한 파괴를 검토할 때에는 좌굴해석을 수행하여야 합니다.

가늘고 긴 구조물 또는 두께가 얇은 구조물이 축방향으로 큰 압축하중을 받는 경우에는 좌굴해석을 수행하여 구조물의 안정성을 검토하여야 합니다. 축방향의 압축하중을 받는 기둥과 외부압력을 받는 박판의 원통 등은 좌굴해석이 필요한 대표적인 구조물입니다.

5.4 열전달해석 (heat transfer analysis)

열전달해석은 물체에서 온도분포를 계산하며, 이 온도분포를 토대로 물체 내에서 열이 흐르는 방향과 크기를 파악할 수 있습니다.

열의 흐름을 유발하는 조건들이 시간에 따라 변할 경우에는 비정상 열전달(transient heat transfer)이고, 그렇지 않고 일정할 경우에는 정상상태 열전달(steady-state heat transfer)로 구분합니다. 그리고, 이러한 조건들이 온도에 따라 변하면 비선형, 그렇지 않으면 선형으로 구분합니다.

일반적으로 온도와 온도구배(temperature gradient)는 구조물에서 열변형과 열응력을 발생시키는 주요 요인 중의 하나이므로, 열전달해석의 수행으로 온도분포를 계산한 후에는 이 온도분포를 이용하여 열변형/열응력을 추가로 계산, 검토하는 일이 많습니다.

5.5 비선형해석 (nonlinear analysis)

선형해석에서는 변위/변형률이 충분히 작고, 응력은 변형률에 선형비례하며, 구조물에 변형이 발생하여도 하중의 방향과 경계조건은 변하지 않는다고 가정하여 모델과 각종 조건을 단순 근사화합니다.

비선형해석에는 하중이 가해짐에 따라 재질의 특성이 변하는 문제(재료비선형), 변위 또는 회전량이 커짐으로써 하중의 작용방향과 분포, 크기가 달라지는 문제(기하비선형), 어셈블리 모델에서 인접한 파트가 분리되거나 만나는 문제(접촉비선형)를 모두 고려할 수 있습니다.

- ✓ **재료비선형**
  재료의 소성영역까지 고려하거나, 고무와 같이 응력-변형률의 관계가 선형이 아닌 재료의 특성을 고려합니다. 재료의 역학적 특성에 따라 적절한 재료모델을 선택하고, 응력-변형률 관계를 지정하여 재료의 비선형 거동을 표현할 수 있습니다.

- ✓ **기하비선형**
  기하비선형에서는 변위와 변형률의 관계가 선형이 아니며, 변형이 과도하게 커짐에 따라 재료물성과 무관하게 구조물의 강성이 변하게 된다는 특징이 있습니다. 구조물의 변형이 과도하게 커지면 작용하중의 크기와 방향에도 변화가 생길 수 있고[3], 각종 계산도 변형된 형상을 기준으로 재계산되어야 합니다.

- ✓ **접촉비선형**
  접촉해석은 작용하중에 의해 모델이 움직이거나 변형이 발생함에 따라 경계조건이 변하게 되는 경계비선형 해석입니다. 접촉해석에서는 두 개의 영역이 서로 만나거나, 미끄러지거나(sliding), 붙었다 떨어지는 등 다양한 상대거동을 보다 실제적으로 분석할 수 있습니다.

선형해석과 달리 비선형해석에서는 전체하중을 여러 개의 하중스텝(load step)으로 나눠서 계산을 수행합니다.
이 하중스텝에 따라 하중의 크기가 전체하중에 도달할 때까지 점진적으로 증가하며, 각 하중스텝에서는 반복계산법(iterative method)으로 해당스텝의 결과를 계산합니다. 비선형성이 심할수록 작은 하중스텝 크기가 요구되고, 이에 따라 하중스텝의 수가 증가하고 또 보다 많은 반복계산이 요구되므로 해석시간이 길어지고, 해석결과 데이터의 양도 증가할 수 있습니다.

[3] 예로, 회전량이 큰 경우에는 하중의 작용방향이 달라질 수 있고, 압력하중의 경우에는 대변형에 의해 작용면적의 크기가 달라짐에 따라 하중의 크기가 달라질 수도 있습니다.

6. 유한요소해석의 프로세스

일반적인 해석 프로세스는 크게 전처리 작업, 해석수행, 그리고 후처리 결과분석, 세 개의 과정으로 나눌 수 있습니다.

6.1 전처리 작업 (pre-processing)

해석을 위한 모델(요소망)을 작성하고, 하중/경계조건을 부여한 다음, 해석종류를 지정해서 해석을 수행시키는 과정으로 구성됩니다.

전통적으로 가장 많은 시간이 소요되는 단계가 해석을 위한 요소망을 작성하는 작업이지만, 현재는 대부분의 경우에 3차원 CAD 모델을 불러와서 자동요소망생성 기능을 이용하여 바로 해석을 위한 요소망을 작성할 수 있으므로 빠르고 편리하게 전처리 작업을 완료할 수 있습니다.

6.2 해석수행 (analysis)

솔버(solver)에 의해 실제로 유한요소법에 의한 계산이 수행되는 과정입니다.

상세한 세부 계산절차는 아래에서 예제를 이용하여 설명합니다.

6.3 결과분석 (post-processing)

솔버가 해석을 완료하면 계산된 각종 결과를 확인하고, 결과의 타당성 등을 검토하는 과정입니다.

해석의 목적에 따라 솔버가 제공하는 결과를 확인하는 것으로 충분할 수도 있고, 필요한 경우에는 해석결과를 이용한 추가적인 연산을 수행하여 설계의 적합성을 판단하기도 합니다.

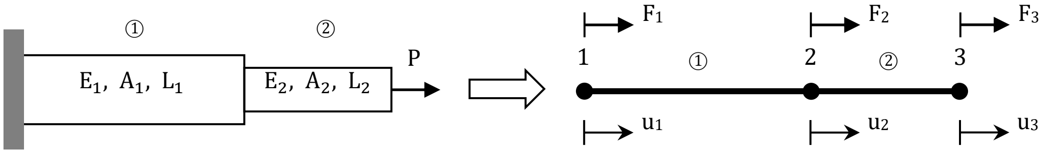
7. 해석수행단계

해석수행 단계에 대해 좀 더 상세하게 정리해 보도록 하겠습니다.

가장 기본적인 선형정적해석의 경우, 사용하는 요소종류와 무관하게 일반적으로 다음과 같은 절차에 따라 계산이 수행됩니다.

(1) 각 요소의 특성을 표현하는 행렬 구성 (강성 등)
(2) 전체 요소의 행렬을 조립하여 전체 시스템을 묘사하는 행렬식 구성 (연립방정식)
(3) 주어진 하중, 경계조건을 행렬식에 반영
(4) 시스템의 행렬식을 풀어서 미지의 자유도값 계산
(5) 자유도값으로부터 추가적인 결과 계산 (변형률과 응력 등)

<그림 8>과 같이 2개의 봉요소로 구성된 간단한 구조물을 이용하여 위의 각 단계를 보다 구체적으로 알아보겠습니다.



<그림 8> 2개의 봉요소로 구성된 구조물과 유한요소모델

(1) 각 요소의 특성을 표현하는 행렬을 계산합니다.

단면적 A, 탄성계수 E, 길이가 L인 봉요소의 강성행렬은 다음과 같이 정의됩니다.
(2개의 절점으로 구성되고, 절점당 1개의 축방향 변위 u만 자유도로 갖는 경우)

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

그러므로, 요소 ①과 ②의 강성행렬은 다음과 같습니다.

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{E_1A_1}{L_1} & -\frac{E_1A_1}{L_1} \\ -\frac{E_1A_1}{L_1} & \frac{E_1A_1}{L_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{E_2A_2}{L_2} & -\frac{E_2A_2}{L_2} \\ -\frac{E_2A_2}{L_2} & \frac{E_2A_2}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

(2) 전체 요소의 행렬을 조립(assemble)하여 전체 시스템을 묘사하는 행렬식을 구성합니다.

요소 ①과 ②는 각각 절점 1과 2, 절점 2와 3으로 연결되어 있고, 절점 1, 2, 3은 각각 1개의 자유도 u_1, u_2, u_3을 가지고 있습니다.

이 구조물은 총 3개의 자유도(u_1, u_2, u_3)를 가지고 있으므로, 요소 ①과 ②의 강성행렬을 다음과 같이 3×3 행렬로 확장하여 표현할 수 있습니다.

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

요소 ①은 절점 3과 연결되어 있지 않기 때문에 요소 강성행렬 $\mathbf{k}_1$의 3행과 3열이 0으로 채워져 있고, 동일한 이유로 요소 ②의 강성행렬 $\mathbf{k}_2$에도 1행과 1열이 0으로 채워져 있습니다.

전체 구조물의 시스템 강성행렬은 이 두 요소행렬의 합으로 구성되므로 간단한 행렬합으로 계산할 수 있고, 이 구조물의 전체 시스템을 표현하는 행렬식도 다음 식과 같이 정의할 수 있습니다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Ku} = \mathbf{F} : \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

주목할 점은 시스템 강성행렬이 대칭행렬이라는 점과, $|\mathbf{K}| = 0$인 **특이(singular)행렬**이므로 역(inverse)행렬을 계산할 수가 없다는 점입니다. 즉, $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$가 불가능하므로 바로 해를 구할 수가 없습니다.

이 시스템 행렬의 특이성을 제거하기 위해서는 최소한 1개 이상의 **구속조건**을 부여하여야 합니다.

(3) 시스템을 표현하는 행렬식에 하중조건과 경계조건을 부여합니다.

예로, **〈그림 8〉**과 같이 왼쪽 끝단이 고정되어 있으면 u_1=0의 경계조건을 부여할 수 있고, 오른쪽 끝단에 축방향의 인장하중 P가 작용한다면 F_1=R, F_2=0, F_3=P의 하중조건을 부여할 수 있습니다. 여기에서 F_1=R은 u_1=0의 경계조건(고정 구속조건)을 유지하기 위한 반력(reaction)입니다.[4]

이 하중조건과 경계조건을 시스템 행렬식에 삽입하면 다음과 같습니다.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

(4) 시스템 행렬식을 풀어서 미지의 자유도값을 계산합니다.

이미 u_1=0이라는 해를 알고 있으므로 시스템 행렬식에서 1행과 1열을 소거할 수 있습니다.

---

[4] 자유도가 미지수인 경우는 관련 하중조건이 지정되어야 하고(0 또는 특정값), 반대로 자유도값이 지정된 경우(즉, 경계조건이 부여된 경우)에는 대응하는 하중이 미지수가 됩니다. **동일한 자유도에 경계조건와 하중조건이 동시에 지정되거나 미지수일 수는 없습니다.**

참고로, 응력해석에서 자유도인 변위값이 지정된 경우(0인 구속과 0이 아닌 강제변위), 대응하는 미지의 하중은 이 변위값을 유지하는데 필요한 반력이 됩니다.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

이제 이 행렬은 특이행렬이 아니므로 역행렬($\mathbf{K}^{-1}$)을 계산할 수 있고, $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$로 미지의 자유도 u_2, u_3의 값을 계산할 수 있습니다. 그리고, 이 계산된 u_2, u_3과 u_1을 원래의 시스템 행렬식에 대입하여 왼쪽 고정단에서의 반력 R을 계산할 수 있습니다. ($R = k_1 u_1 - k_1 u_2 + 0 \cdot u_3$)

(5) 계산된 자유도값을 이용하여 추가적인 결과들을 계산합니다.

계산된 변위결과를 이용하여 요소 ①과 ②의 변형률과 응력을 각각 다음처럼 계산할 수 있습니다.

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = E_1 \left(\frac{u_2 - u_1}{L_1}\right), \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 \left(\frac{u_3 - u_2}{L_2}\right)$$

참고로, **변위**는 요소의 경계(절점 2)에서 **연속**이지만, **응력**은 위와 같이 요소 단위로 계산되며 요소경계에서 **불연속**입니다. 그리고, 절점 2는 요소 ①에서 σ_1, 요소 ②에서 σ_2의 응력값(**요소응력**)을 가지며, 이 두 값을 평균한 값이 절점 2의 **절점응력(절점평균응력)**입니다. → $\sigma_{avg@N2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

선형정적해석에서의 응력결과에 분석방법에 대해서는 **〈선형정적해석〉** 장에서 보다 상세하게 설명합니다.

이처럼 유한요소법은 대상 모델을 유한개의 요소로 분할하고, 개별 요소의 특성을 계산한 다음, 전체 요소의 특성을 모두 조합하여 전체 모델의 특성과 원하는 결과를 근사적으로 계산하는 수치해법입니다.

그러면, 2개의 봉요소로 구성된 간단한 구조물 예제를 이용하여 정리한 유한요소해석의 절차를 토대로 midas NFX에서 솔버의 해석절차와 관련 정보를 알아보겠습니다.

다음의 **〈그림 9〉**는 midas NFX에서 선형정적해석을 수행할 때, 솔버가 출력하는 진행정보의 예입니다.

```
출력
> midas NFX (Designer) 2011R1 (32bit)
> Copyright (C) SINCE 2007 MIDAS Information Technology Co., Ltd. ALL RIGHTS RESERVED.
> READING INPUT FILE [E:₩NFX Works₩Designer₩Mdl_LS.mec]
> PERFORMING ANALYSIS TYPE=[LinearStatic] LABEL=[선형 정적해석 (필수)]
> - SETUP ANALYSIS
>   [PROBLEM INFO]
>   NUMBER OF NODES      : 21645
>   NUMBER OF ELEMENTS  : 14316
>   NUMBER OF DOFS       : 64935
>   NUMBER OF EQUATIONS : 63060
> - RUN ANALYSIS
>     MULTI-FRONTAL SOLVER (AUTO SELECTED)
>   - BUILDING KU=F
>   - SOLVING KU=F
>     FACTORIZATION COMPLETED
> - DATA RECOVERY
>   - COMPUTING OUTPUT DATA
>   - WRITING OUTPUT FILE
> ANALYSIS COMPLETED
>
> [SYSTEM INFO]
> NUMBER OF THREADS    : 1
> MAXIMUM MEMORY USAGE : 570 MB
> AVAILABLE MEMORY     : 1542 MB
> TOTAL CPU TIME       : 18.345 sec
> WALL CLOCK TIME      : 21.465 sec
>
> TOTAL WARNINGS : 0
```

〈그림 9〉 midas NFX에서 선정정적해석시 솔버의 해석진행 정보

지금까지 살펴본 유한요소법의 해석절차를 기본으로 이 출력정보를 살펴보도록 하겠습니다.

7.1 [PROBLEM INFO] 부분

```
>  [PROBLEM INFO]
>  NUMBER OF NODES     : 21645
>  NUMBER OF ELEMENTS  : 14316
>  NUMBER OF DOFS      : 64935
>  NUMBER OF EQUATIONS : 63060
```

해석모델의 절점, 요소개수와 총 자유도 개수, 그리고 실제 행렬방정식의 크기 정보가 출력됩니다.

총 자유도 개수에서 값이 지정된 자유도를 제외한 크기가 실제 행렬방정식의 크기가 됩니다. 위의 (4)와 (5)의 경우, 총 자유도 개수는 3이지만 실제 풀이하는 행렬방정식의 크기는 2(2 2)가 됩니다.

7.2 RUN ANALYSIS 부분

```
> - RUN ANALYSIS
>    MULTI-FRONTAL SOLVER (AUTO SELECTED)
>  - BUILDING KU=F
>  - SOLVING KU=F
>    FACTORIZATION COMPLETED
```

먼저, midas NFX가 제공하는 행렬방정식의 솔버 중 직접법 솔버인 멀티프론탈(multi-frontal)과 **반복법 솔버인 AMG(algebraic multigrid)** 중에서 이 모델의 해석에 사용되는 솔버를 알려줍니다.[5]

해석종류와 모델규모 등에 따라 프로그램이 자동으로 선정해 주므로 사용자가 별도로 지정할 필요는 없습니다.

- ✓ BUILDING KU=F
  (1)~(3)의 단계로 요소의 특성행렬를 계산하고, 이를 조립하여 전체 시스템의 행렬방정식을 구성한 다음, 지정된 하중, 경계조건을 처리하는 단계입니다.

- ✓ SOLVING KU=F
  (4)의 단계로 시스템의 행렬방정식을 풀어서 미지수 자유도의 값을 계산하는 단계이며, 실제 해석에서 가장 많은 시간이 소요됩니다.
  실제 해석에서는 행렬방정식이 규모가 아주 크기 때문에 직접 역행렬을 계산하지는 않고, 행렬분해법(matrix decomposition, matrix factorization)을 이용하여 풀이합니다.
  참고로 해석결과의 정확성은 요소의 성능과 해석알고리즘 등에 의해 결정되지만, 전체 해석성능(시간)은 이 연립방정식의 풀이방법에 의해 결정됩니다.

7.3 DATA RECOVERY 부분

```
> - DATA RECOVERY
>   - COMPUTING OUTPUT DATA
>   - WRITING OUTPUT FILE
```

(5)의 단계로 계산된 자유도값으로부터 응력 등의 각종 추가적인 결과들을 계산하고, 결과파일로 출력합니다.

7.4 [SYSTEM INFOR] 부분

```
> [SYSTEM INFO]
> NUMBER OF THREADS    : 1
> MAXIMUM MEMORY USAGE : 570 MB
> AVAILABLE MEMORY     : 1542 MB
> TOTAL CPU TIME       : 18.345 sec
> WALL CLOCK TIME      : 21.465 sec
```

해석과 관련된 시스템 정보와 소요된 해석시간을 알려줍니다.

[5] 직접법(direct solver)은 KU=F를 가우스 소거법(Gauss elimination)을 기반으로 직접 푸는 방법(예: $U=K^{-1}F$)이고, 반복법(iterative solver)은 $KU-F<\varepsilon$(허용오차)의 조건을 만족하는 U를 계산하는 방법입니다.

NUMBER OF THREADS는 시스템의 코어개수로, 2개 이상인 경우에는 자동으로 병렬처리를 활용하여 보다 빠른 해석을 수행합니다.

MAXIMUM MEMORY USAGE는 사용가능한 시스템의 메모리량입니다. 만약 메모리량이 충분하지 못하여 행렬방정식을 메모리에 저장하지 못할 경우에는 자동으로 하드디스크를 활용하여 해석을 수행하며, 파일 입출력에 의해 해석시간은 길어질 수 있습니다.